

Тема: Розв'язування типових задач. Самостійна робота

Мета:

- *Навчальна:* навчати розв'язувати показникові нерівності різними методами;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння математичною мовою висловлювати власну думку; правильно користуватись термінологією, пов'язаною з вивченою темою;
- *Виховна:* виховувати наполегливість; вміння робити правильні висновки та бачити кінцеву мету;

Компетенції:

- *Спілкування державною мовою:* розуміти, пояснювати і перетворювати тексти математичних задач (усно і письмово), грамотно висловлюватися рідною мовою; доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати, доводити правильність тверджень; поповнювати свій словниковий запас

Тип уроку: удосконалення умінь і навичок;

Обладнання: опорний конспект, навчальна презентація, картки із завданнями та розв'язками самостійної роботи, мультимедійне обладнання, презентація;

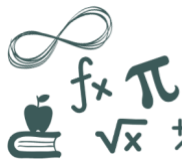
Хід уроку

I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Перевірка виконання д/з
- Налаштування на роботу

II. Актуалізація опорних знань

- Які нерівності називають показниковими?
- Які нерівності називаються найпростішими показниковими нерівностями?
- Як розв'язати нерівність виду $a^x > b$, якщо $b = a^c$ і $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність виду $a^x > b$, якщо $b = a^c$ і $0 < a < 1$?
- До якої нерівності зводиться нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $a > 1$?
- До якої нерівності зводиться нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $0 < a < 1$?



III. Розв'язування задач

№1

Розв'яжіть нерівність:

$$1) 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$$

$$2) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}$$

Розв'язок:

$$1) 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leq \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{-3x}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-9x}$$

$$5x^2 - 2 \geq -9x$$

$$5x^2 + 9x - 2 \geq 0$$

$$f(x) = 5x^2 + 9x - 2$$

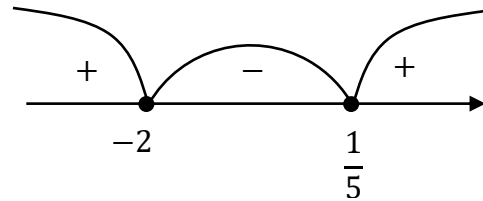
$$\text{ОДЗ: } x \in \mathbb{R}$$

Нулі функції:

$$5x^2 + 9x - 2 = 0$$

$$D = 81 + 40 = 121 = 11^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm 11}{10} = \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$



$$\text{Відповідь: } x \in (-\infty; 2] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$$

$$2) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}$$

Розв'язок:

$$(\sqrt{3})^{x-1} > 3^{-1}$$

$$3^{\frac{x-1}{2}} > 3^{-1}$$

$$\frac{x-1}{2} > -1$$

$$x-1 > -2$$

$$x > -1$$

$$\text{Відповідь: } x \in (-1; +\infty)$$



Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geq 26$

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$

1) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geq 26$

Розв'язок:

Винесемо за дужки $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1-x+1}\right) \geq 26$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) \geq 26$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{25}\right) \geq 26$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \cdot \frac{26}{25} \geq 26$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \geq 26 \cdot \frac{25}{26}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \geq 25$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \geq 5^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

$$x-1 \leq -2$$

$$x \leq -1$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -1]$

2) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leq 650$

2) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leq 650$

Розв'язок:

Винесемо за дужки 6^x :

$$6^x(2 + 3 \cdot 6^{x+3-x}) \leq 650$$

$$6^x(2 + 3 \cdot 6^3) \leq 650$$

$$6^x \cdot 650 \leq 650$$

$$6^x \leq 1$$

$$6^x \leq 6^0$$

$$x \leq 0$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 0]$

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$

Розв'язок:

Винесемо за дужки $\left(\frac{3}{4}\right)^x$:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1-x}\right) > \frac{3}{16}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x \left(1 - \frac{3}{4}\right) > \frac{3}{16}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \frac{1}{4} > \frac{3}{16}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{3}{16} \cdot 4$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x > \frac{3}{16} \cdot 4$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^1$$

$$x < 1$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1)$



Розв'яжіть нерівність:

1) $0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geq 0$

2) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leq 0$

3) $25^x + 5^x - 30 \geq 0$

1) $0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geq 0$

Розв'язок:

$$0,5^{2x} - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geq 0$$

Нехай $0,5^x = t$:

$$t^2 - 12t + 32 \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - 12t + 32$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

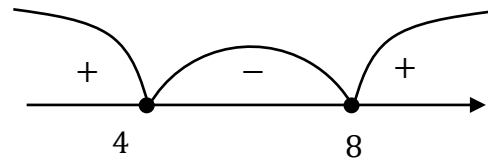
2. Нулі функції $f(t) = 0$

$$t^2 - 12t + 32 = 0$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 = 8 \\ t_2 = 4 \end{cases}$

*Можемо розкласти на множники квадратний тричлен для зручності визначення знаку функції на кожному проміжку.

$$(t - 8)(t - 4) = 0$$



*Так як знак нерівності « \leq », оберемо проміжок $(-\infty; 4] \cup [8; +\infty)$

$$t \leq 4$$

$$t \geq 8$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} 0,5^x \leq 4 \\ 0,5^x \geq 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0,5^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ 0,5^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0,5^x \leq 0,5^{-2} \\ 0,5^x \geq 0,5^{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq -2 \\ x \leq -3 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$

2) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leq 0$

Розв'язок:

$$\frac{6^{2x}}{6} - \frac{6^x}{3} - 4 \leq 0 \quad | \cdot 6$$

$$6^{2x} - 2 \cdot 6^x - 24 \leq 0$$

Нехай $6^x = t$:

$$t^2 - 2t - 24 \leq 0$$



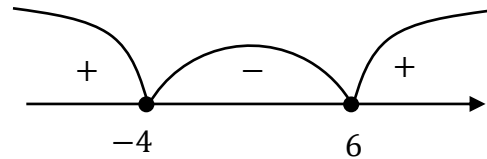
$$f(t) = t^2 - 2t - 24$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$
2. Нулі функції $f(t) = 0$
 $t^2 - 2t - 24 = 0$

$$\text{За теоремою Вієта} \begin{cases} t_1 = -4 \\ t_2 = 6 \end{cases}$$

**Можемо розкласти на множники квадратний тричлен для зручності визначення знаку функції на кожному проміжку.*

$$(t + 4)(t - 6) = 0$$



**Так як знак нерівності « \leq », оберемо проміжок $[-4; 6]$*

$$t \geq -4$$

$$t \leq 6$$

$$\left. \begin{array}{l} 6^x \geq -4 \\ 6^x \leq 6 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ 6^x \leq 6^1 \end{array} \right| \Rightarrow x \leq 1$$

Відповідь: $x \in (-\infty; 1]$

$$3) 25^x + 5^x - 30 \geq 0$$

Розв'язок:

$$5^{2x} + 5^x - 30 \geq 0$$

$$\text{Нехай } 5^x = t:$$

$$t^2 + t - 30 \geq 0$$

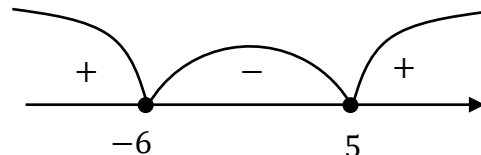
$$f(t) = t^2 + t - 30$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$
2. Нулі функції:
 $t^2 + t - 30 = 0$

$$\text{За теоремою Вієта} \begin{cases} t_1 = 5 \\ t_2 = -6 \end{cases}$$

**Можемо розкласти на множники квадратний тричлен для зручності визначення знаку функції на кожному проміжку.*

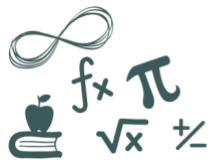
$$(t - 5)(t + 6) = 0$$



**Так як знак нерівності « \geq », оберемо проміжок $(-\infty; -6] \cup [5; +\infty)$*

$$t \leq -6$$

$$t \geq 5$$



$$\left. \begin{array}{l} 5^x \leq -6 \\ 5^x \geq 5 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \emptyset \\ 5^x \geq 5^1 \end{array} \right| \Rightarrow x \geq 1$$

Відповідь: $x \in [1; +\infty)$

№4

Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leq 0$

2) $\frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geq 0$

1) $\frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leq 0$

Розв'язок:

$$\frac{5^x - 125}{(x - 2)^2} \leq 0$$

1. ОДЗ:

$$x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

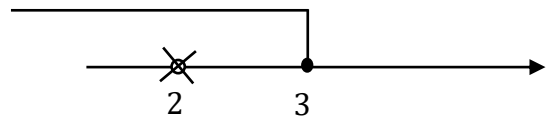
2. Знаменник дробу додатний
при будь-якому значенні x з ОДЗ \Rightarrow Знак функції залежить
тільки від чисельника

$$5^x - 125 \leq 0$$

$$5^x \leq 5^3$$

$$x \leq 3$$

*Так як знак нерівності « \leq », оберемо проміжок $(-\infty; 3]$ та врахуємо
ОДЗ.



Відповідь: $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3]$

1) $\frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geq 0$

Розв'язок:

$$\frac{16 - 4^x}{(3x + 2)^2} \geq 0$$

1. ОДЗ:

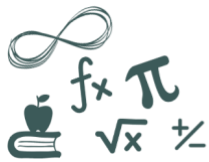
$$3x + 2 \neq 0$$

$$3x \neq -2$$

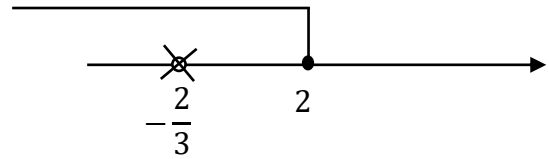
$$x \neq -\frac{2}{3}$$

2. Знаменник дробу додатний
при будь-якому значенні x з ОДЗ \Rightarrow Знак функції залежить
тільки від чисельника

$$16 - 4^x \geq 0$$



$$4^2 \geq 4^x$$
$$x \leq 2$$



Відповідь: $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 2\right]$

№5

Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} - 8 > 0$

2) $2^{x+3} + 2^{1-x} < 17$

3) $6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geq 0$

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leq \frac{6}{5}$

1) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} - 8 > 0$

Розв'язок:

$$3^x - \frac{9}{3^x} - 8 > 0 \quad | \cdot 3^x$$

$$3^x \cdot 3^x - 9 - 8 \cdot 3^x > 0$$

$$3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 > 0$$

Нехай $3^x = t$:

$$t^2 - 8t - 9 > 0$$

За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = -1 \end{cases}$

*Можемо розкласти на множники квадратний тричлен для зручності визначення знаку функції на кожному проміжку.

$$(t - 9)(t + 1) = 0$$

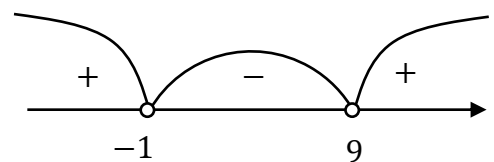
*Так як знак нерівності «>», оберемо проміжок $(-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$

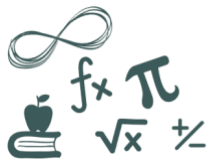
$$t < -1$$

$$t > 9$$

$$\begin{array}{l} 3^x < -1 \\ 3^x > 9 \end{array} \Rightarrow 3^x > 3^2 \Rightarrow x > 2$$

Відповідь: $x \in (2; +\infty)$





2) $2^{x+3} + 2^{1-x} < 17$

Розв'язок:

$$8 \cdot 2^x + \frac{2}{2^x} - 17 < 0 \quad | \cdot 2^x$$

$$8 \cdot 2^{2x} + 2 - 17 \cdot 2^x < 0$$

$$8 \cdot 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 2 < 0$$

Нехай $2^x = t$:

$$8t^2 - 17t + 2 < 0$$

$$f(t) = 8t^2 - 17t + 2$$

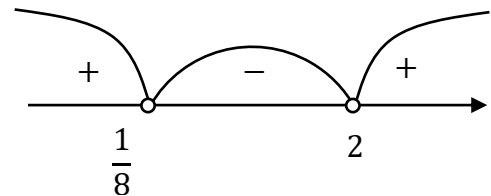
1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(t)$: $8t^2 - 17t + 2 = 0$

$$8t^2 - 17t + 2 = 0$$

$$D = 289 - 64 = 225 = 15^2$$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{16} = \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = \frac{1}{8} \end{cases}$$



*Так як знак нерівності «<», оберемо проміжок $(\frac{1}{8}; 2)$

$$t > \frac{1}{8}$$

$$t < 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 2^x > \frac{1}{8} \\ 2^x < 2 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2^x > 2^{-3} \\ 2^x < 2^1 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > -3 \\ x < 1 \end{array} \right|$$

Відповідь: $x \in (-3; 1)$

3) $6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geq 0$

Розв'язок:

$$6^x \cdot 6^2 + \frac{1}{6^x} - 37 \geq 0 \quad | \cdot 6^x$$

$$36 \cdot 6^{2x} + 1 - 37 \cdot 6^x \geq 0$$

$$36 \cdot 6^{2x} - 37 \cdot 6^x + 1 \geq 0$$

Нехай $6^x = t$:

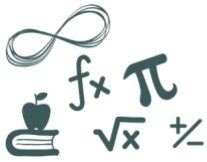
$$36t^2 - 37t + 1 \geq 0$$

$$f(t) = 36t^2 - 37t + 1$$

1. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$

2. Нулі функції $f(t)$: $36t^2 - 37t + 1 = 0$

$$D = 1369 - 144 = 1225 = 35^2$$



$$t_{1,2} = \frac{37 \pm 35}{72} = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = \frac{1}{36} \end{cases}$$

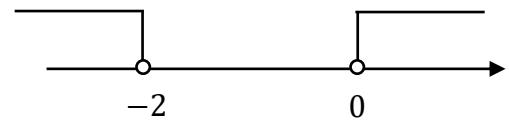
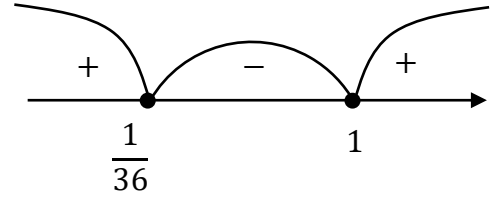
*Так як знак нерівності « \geq », оберемо проміжок $(-\infty; \frac{1}{36}] \cup [1; +\infty)$

$$t < \frac{1}{36}$$

$$t > 1$$

$$6^x < \frac{1}{36} \Big| \Rightarrow 6^x < 6^{-2} \Big| \Rightarrow x < -2$$
$$6^x > 1 \Big| \Rightarrow 6^x > 6^0 \Big| \Rightarrow x > 0$$

Відповідь: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$



4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leq \frac{6}{5}$

Розв'язок:

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{3}{5}\right)^x} \leq \frac{6}{5} \quad \Big| \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} + \frac{3}{5} \leq \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{3}{5} \leq 0 \quad | \cdot 5$$

$$3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 3 \leq 0$$

Нехай $\left(\frac{3}{5}\right)^x = t$:

$$3t^2 - 6t + 3 \leq 0 \quad | : 3$$

$$t^2 - 2t + 1 \leq 0$$

$$(t - 1)^2 \leq 0$$

$$t = 1$$

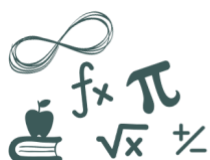
*Нерівність має єдиний корінь, тому:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^0$$

$$x = 0$$

Відповідь: $\{0\}$



Самостійна робота

IV. Підсумок уроку

- Які нерівності називають показниковими?
- Які нерівності називаються найпростішими показниковими нерівностями?
- Як розв'язати нерівність виду $a^x > b$, якщо $b = a^c$ і $a > 1$?
- Як розв'язати нерівність виду $a^x > b$, якщо $b = a^c$ і $0 < a < 1$?
- До якої нерівності зводиться нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $a > 1$?
- До якої нерівності зводиться нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $0 < a < 1$?

V. Домашнє завдання

Повторити §1 (ст.6-17) Виконати № 3.11 (3-4); 3.13 (3-4); 3.16	Мерзляк А.Г.
Повторити §3 Виконати 3.4; 3.8; 3.12; 3.14; 3.22	Істер О.С.
Повторити §2 (п.2.3) Виконати 2.3.3 (2, 4); 2.3.4 (2, 4)	Нелін Є.П.
Повторити §2 Виконати № 57; 77; 81	Бевз Г.П.